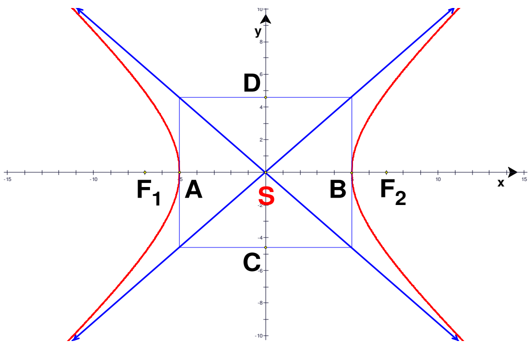
HIPERBOLA (m©h)

hiperbola



hiperbola je skup svih točaka ravnine za koje je apsolutna vrijednost razlike udaljenosti od dvije zadane (fiksne) točke te ravnine stalna (konstantna)

središte hiperbole S(0, 0)

žarišta ili fokusi: $F_1(-e, 0)$, $F_2(e, 0)$

vrhovi ili tjemena: A(– a, 0), B(a, 0)

realna ili glavna os hiperbole: $|AB| = 2a$

imaginarna os hiperbole: $|CD| = 2b$, C(0, – b), D(0, b)

realna poluos hiperbole: $|AS| = |SB| = a$

imaginarna poluos hiperbole: $|CS| = |SD| = b$

linearni ekscentricitet hiperbole: $|F_1S| = |SF_2| = e$, $e^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow e = \sqrt{a^2+b^2}$

numerički ekscentricitet hiperbole: $\varepsilon = \dfrac{e}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$, $e > a \Rightarrow \varepsilon > 1$

parametar hiperbole

tetiva hiperbole koja prolazi fokusom i okomita je na realnu os

duljina parametra: $2p = \dfrac{2\cdot b^2}{a}$, poluparametar: $p = \dfrac{b^2}{a}$

osna (kanonska) jednadžba hiperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ili} \quad b^2\cdot x^2 - a^2\cdot y^2 = a^2\cdot b^2$$

vršna jednadžba hiperbole

$$y^2 = 2\cdot p\cdot x + \frac{b^2}{a^2}\cdot x^2$$

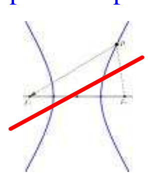
parametarska jednadžba hiperbole

$$x = a\cdot \mathrm{ch}\,t \;,\quad y = b\cdot \mathrm{sh}\,t \quad \text{ili} \quad x = a\cdot\frac{1}{\cos t} \;,\quad y = b\cdot tg\,t \;,\quad t - \text{parametar}$$

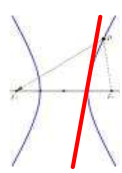
jednadžba hiperbole sa središtem S(p, q), a osi 2a i 2b paralelne su s koordinatnim osima

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$$

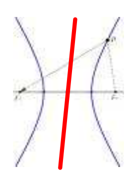
međusobni položaj hiperbole i pravca



pravac je sekanta hiperbole



pravac je tangenta hiperbole



pravac ne siječe hiperbolu

presjek pravca i hiperbole

traže se njihove zajedničke točke (ako postoje)

treba riješiti sustav jednadžbi

$$\left.\begin{array}{r} y = kx + l \\ b^2\cdot x^2 - a^2\cdot y^2 = a^2\cdot b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{l} \text{uvrstimo y iz prve} \\ \text{u drugu jednadžbu} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{c} \text{nakon sređivanja dobijemo} \\ \text{kvadratnu jednadžbu} \end{array}\right):$$

- ako jednadžba ima dva realna rješenja, onda pravac siječe hiperbolu u dvije točke
- ako jednadžba ima dvostruko realno rješenje, onda je pravac tangenta
- ako jednadžba ima konjugirano kompleksna rješenja, onda se pravac i hiperbola ne sijeku

uvjet dodira pravca y = k · x + l i hiperbole $b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2$

$$a^2 \cdot k^2 - b^2 = l^2$$

koordinate dirališta

$$D\left(-\frac{k \cdot a^2}{l},\ -\frac{b^2}{l}\right)$$

uvjet dodira pravca Ax + By + C = 0 i hiperbole $b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2$

$$A^2 \cdot a^2 - B^2 \cdot b^2 = C^2$$

jednadžba tangente u točki T(x_0, y_0) hiperbole

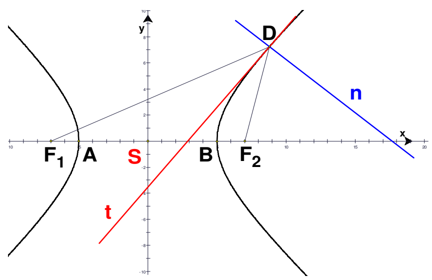
$$\frac{x_0 \cdot x}{a^2} - \frac{y_0 \cdot y}{b^2} = 1 \quad \text{ili} \quad b^2 \cdot x_0 \cdot x - a^2 \cdot y_0 \cdot y = a^2 \cdot b^2$$

jednadžba normale u točki T(x_0, y_0) hiperbole

$$y - y_0 = -\frac{a^2 \cdot y_0}{b^2 \cdot x_0} \cdot (x - x_0)$$

simetričnost

- hiperbola ima dvije osi simetrije
- hiperbola ima jedno središte simetrije



tangenta i normala na hiperbolu simetrale su unutarnjeg i vanjskog kuta među radijus–vektorima dirališta:

$\overrightarrow{F_1D}$ i $\overrightarrow{F_2D}$

asimptote

- pravci koji dodiruju hiperbolu u beskonačnosti
- pravci kojima se grane hiperbole neograničeno približavaju pri udaljavanju u beskonačnost

jednadžbe asimptota

$$y = \frac{b}{a} \cdot x \quad , \quad y = -\frac{b}{a} \cdot x$$

jednakostranična hiperbola

žarišta ili fokusi: $F_1\left(-a \cdot \sqrt{2}, 0\right)$, $F_2\left(a \cdot \sqrt{2}, 0\right)$, vrhovi ili tjemena: A(– a, 0), B(a, 0)

asimptote: y = – x, y = x

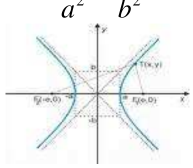
jednadžbe jednakostranične hiperbole

$$a = b \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x^2 - y^2 = a^2$$

žarišta i koordinatne osi

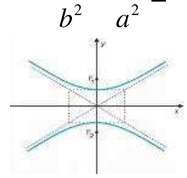
ako su žarišta F_1 i F_2 na x-osi jednadžba hiperbole je:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



ako su žarišta F_1 i F_2 na y-osi jednadžba hiperbole je:

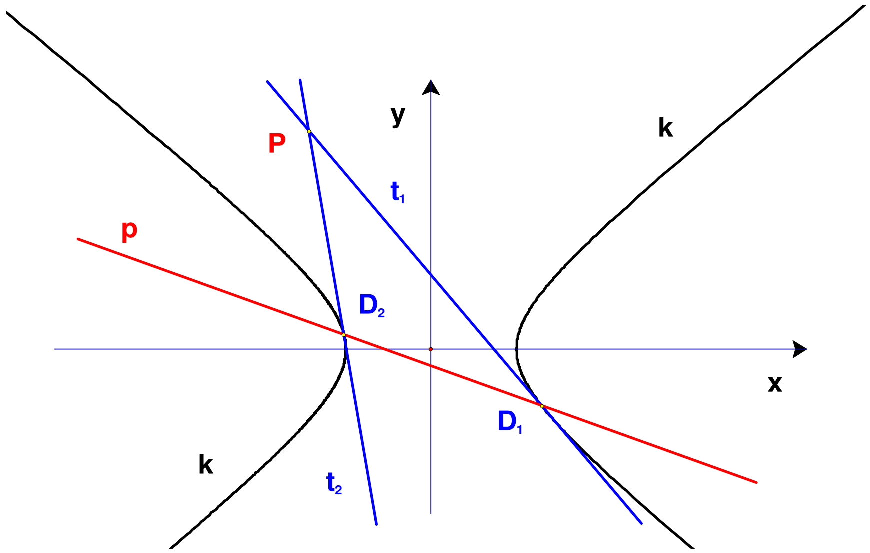
$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1$$



Jednadžba hiperbole kojoj su osi paralelne s koordinatnim osima, a koordinate središta su S(p, q)

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}-\frac{(y-q)^2}{b^2}=1$$

pol i polara hiperbole



Polara je spojnica dirališta D_1 i D_2 tangenata povučenih iz točke P na hiperbolu k.
Pravac p je polara točke P s obzirom na hiperbolu k.
Točka P je pol pravca p (polare) s obzirom na hiperbolu k.
Jednadžba polare točke P s obzirom na hiperbolu k glasi:

- $$\left.\begin{array}{l} b^2\cdot x^2-a^2\cdot y^2=a^2\cdot b^2 \\ P\left(x_0,\ y_0\right) \end{array}\right\} \Rightarrow b^2\cdot x_0\cdot x-a^2\cdot y_0\cdot y=a^2\cdot b^2$$
- $$\left.\begin{array}{l} b^2\cdot(x-p)^2-a^2\cdot(y-q)^2=a^2\cdot b^2 \\ P\left(x_0,\ y_0\right) \end{array}\right\} \Rightarrow b^2\cdot\left(x_0-p\right)\cdot(x-p)-a^2\cdot\left(y_0-q\right)\cdot(y-q)=a^2\cdot b^2$$

Promotrimo slijedeće slike...

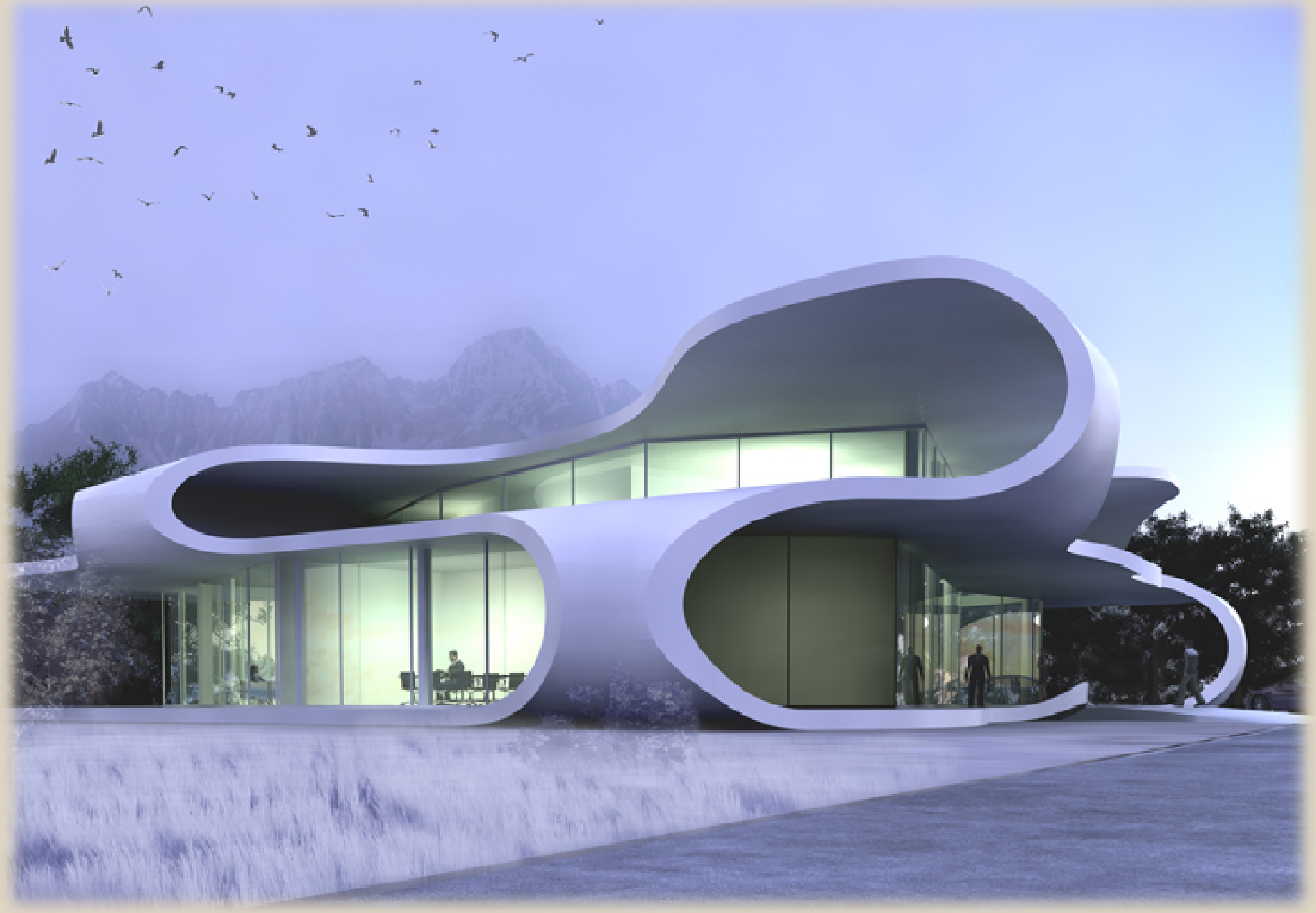
Pokušajte uočiti što im je zajedničko!

Aerodrom *Dulles*

Roissy – Charles de Gaulle Airpport Arrivals/Departure board (Paris)

Hong Kong MTR rapid transit station

Modern House Design



Rashladni toranj nuklearne elektrane

South America, Brazil, Brasilia. Brasília's Cathedral -Basilica of Our Lady Aparecida (Gospe Bezgrješnog Začeća)

Gospa od Aparecide
(portugalski: Nossa Senhora Aparecida)
- naziv je za Blaženu Djevicu Mariju u Brazilu.

Od 18.stoljeća postoji glineni kip Blažene Djevice Marije, u tradicionalnom obliku Bezgrješnog Začeća.

Vjeruje se, da su kip prvotno pronašli ribari, koji su čudesno uhvatili puno ribe, nakon što su se utekli zagovoru Blažene Djevice Marije

Taman kip trenutno se nalazi u bazilici Nacionalnog svetišta Gospe od Aparecide u São Paulu.

Rimokatolička Crkva u Brazilu slavi njezin blagdan 12. listopada. Baziliku je posvetio bl. papa Ivan Pavao II. 1980 godine.

Bazilika je četvrto najpopularnije marijansko svetište u svijetu. Može primiti do 45 000 vjernika.

Papa Pio XI. dao je svetištu počasni naslov manje ili papinske bazilike 1929., a bl. papa Ivan Pavao II. proglasio je Gospu od Aparecide **zaštitnicom Brazila** 1980. godine.

James S. McDonnell Planetarium of the St. Louis Science Center.

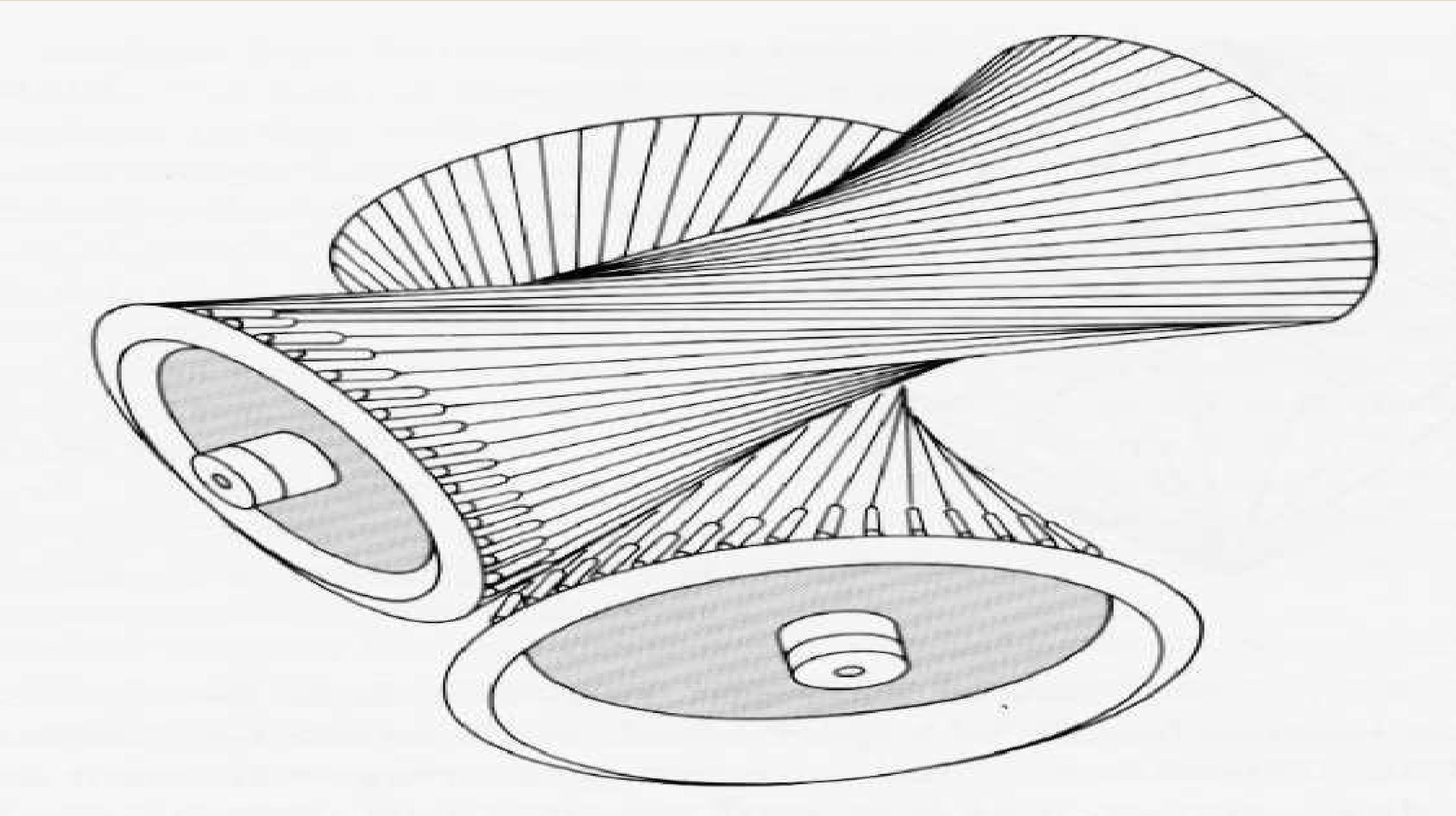
Hiperboloidi

Spomenik palim borcima
Za vrijeme 2.svj. rata
na Sutjesci, Tjentište

Odsjaj svjetiljke na zidu

Posuda za jaja

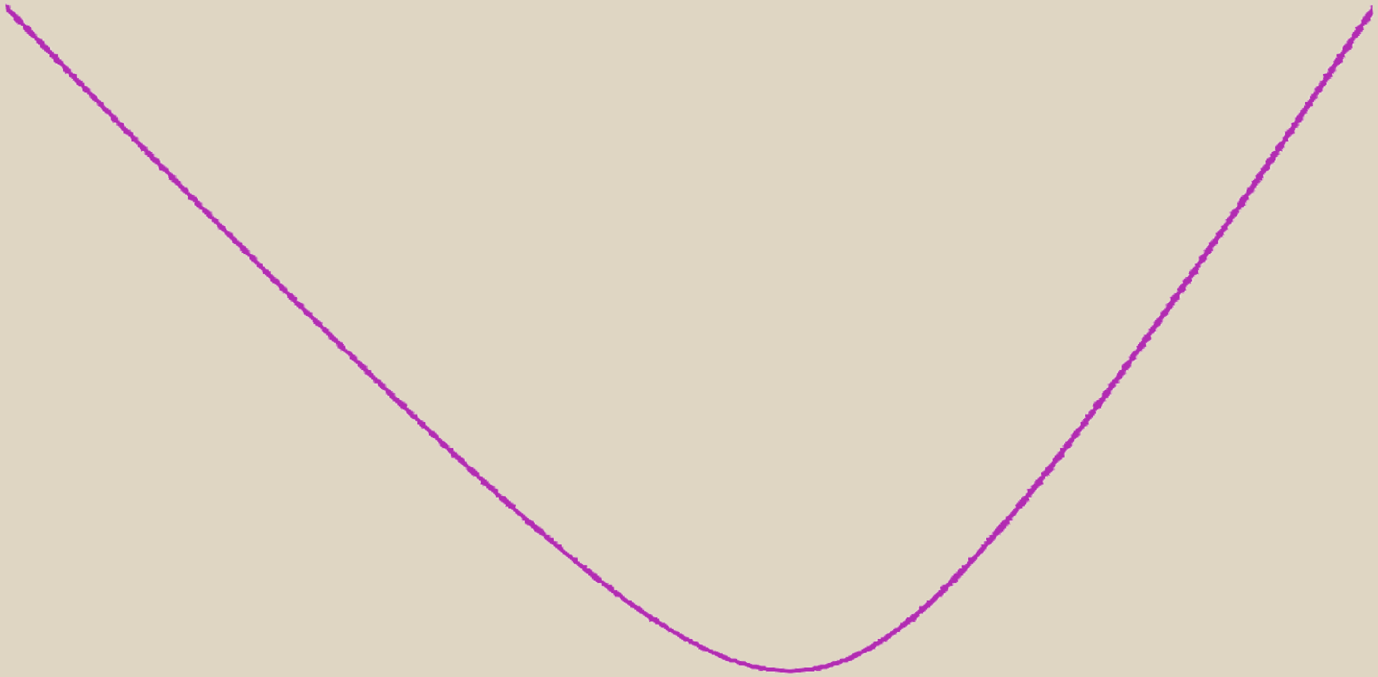
Mehanizam za prijenos u automobilu



Vlak smrti

Uočavate li nešto zajedničko?
Nekakvu zakrivljenost?

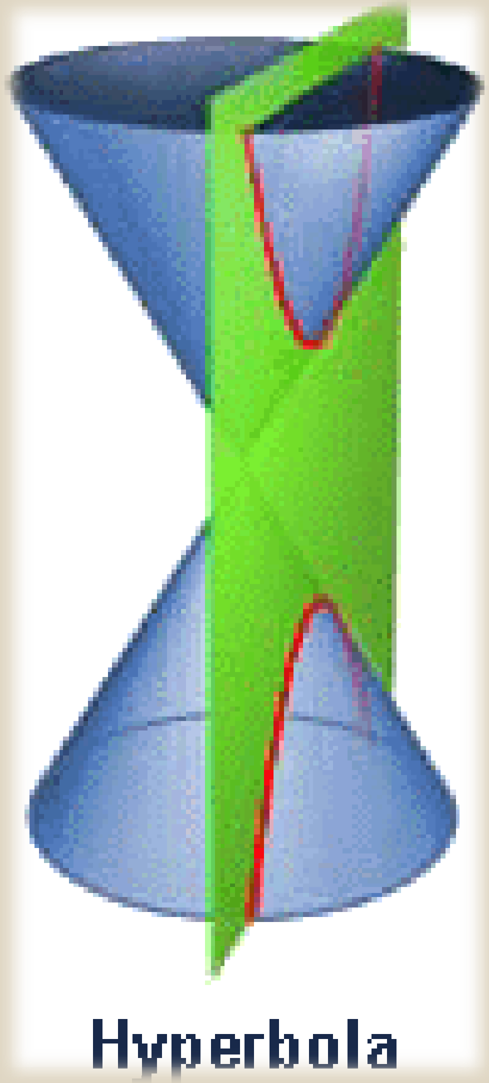
Možemo uočiti krivulju ovakvog izgleda...



Tu krivulju nazivamo

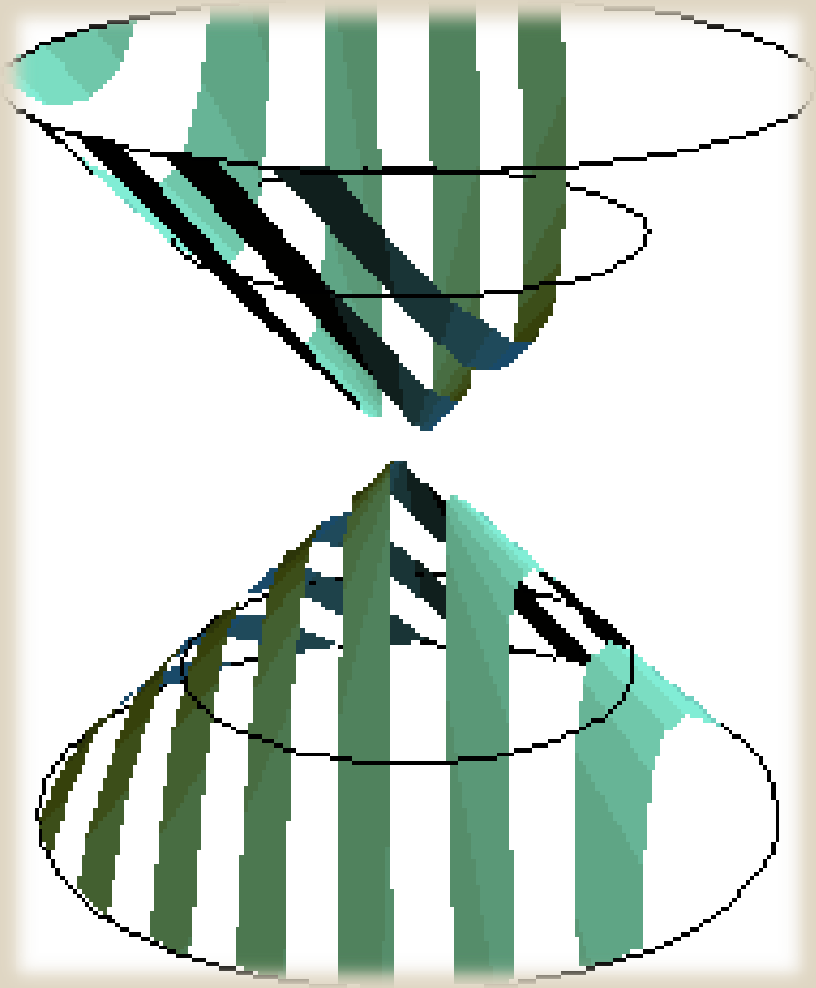
Hiperbola

Što je hiperbola?



Presjek
stošca i
ravnine.
Ravnina je pri
tom
paralelna
s njegovom osi

Još jedan pogled na istu sliku...

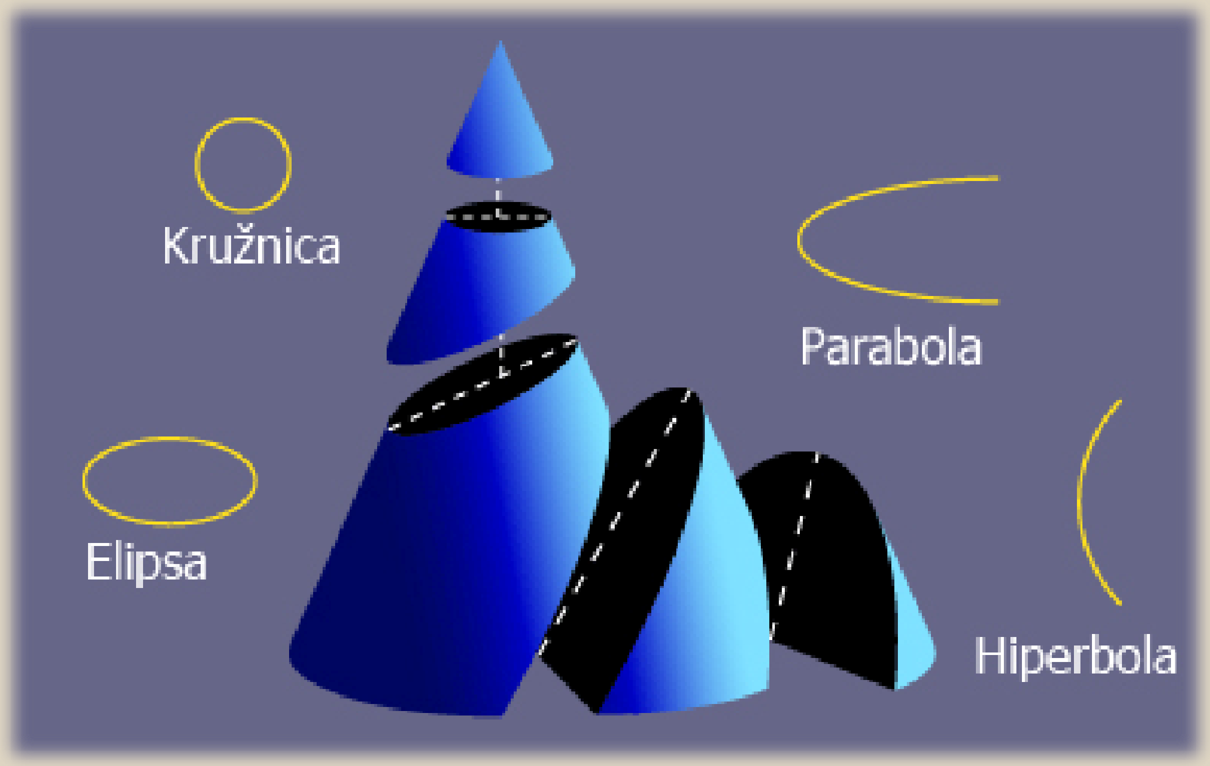


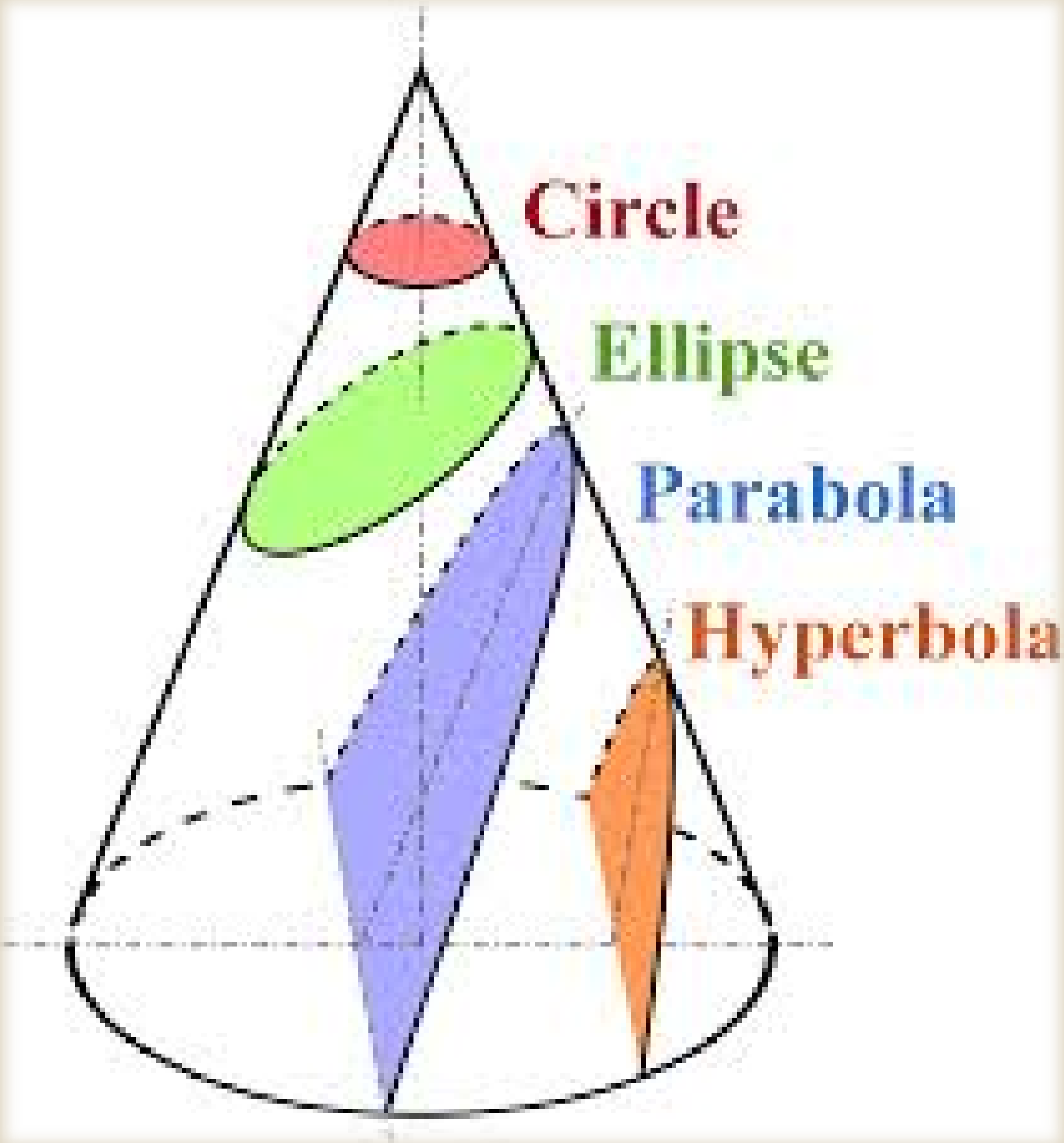
Više paralelnih presjeka...

Razrezali smo stožac na "fete"

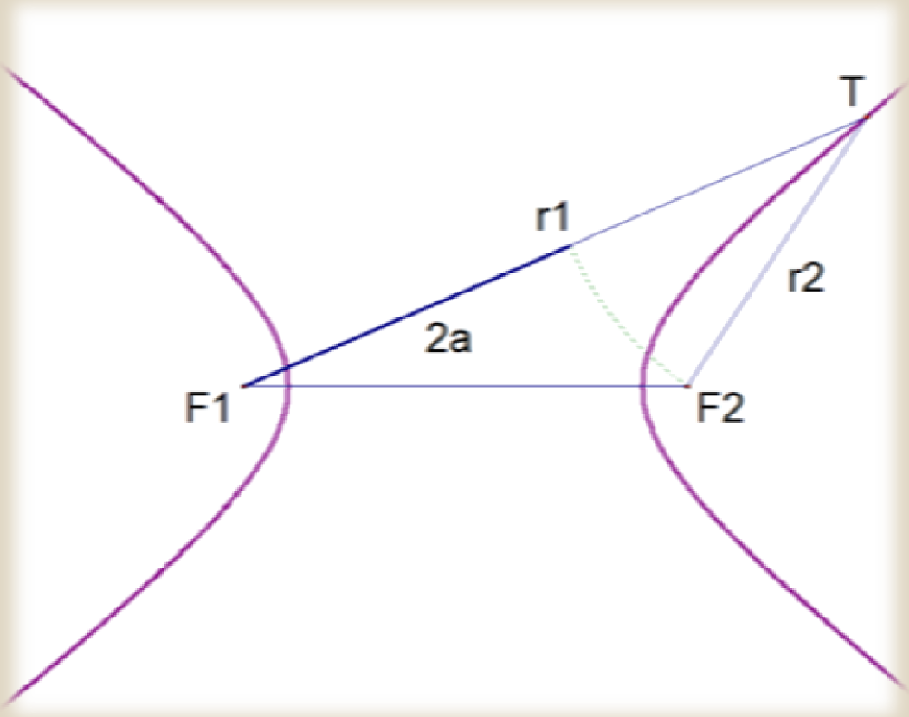
Zašto baš ravnina paralelna s osi?

- Što kad ne bi bila takva?
  - Prisjetimo se kružnice i elipse...




Circle
Ellipse
Parabola
Hyperbola

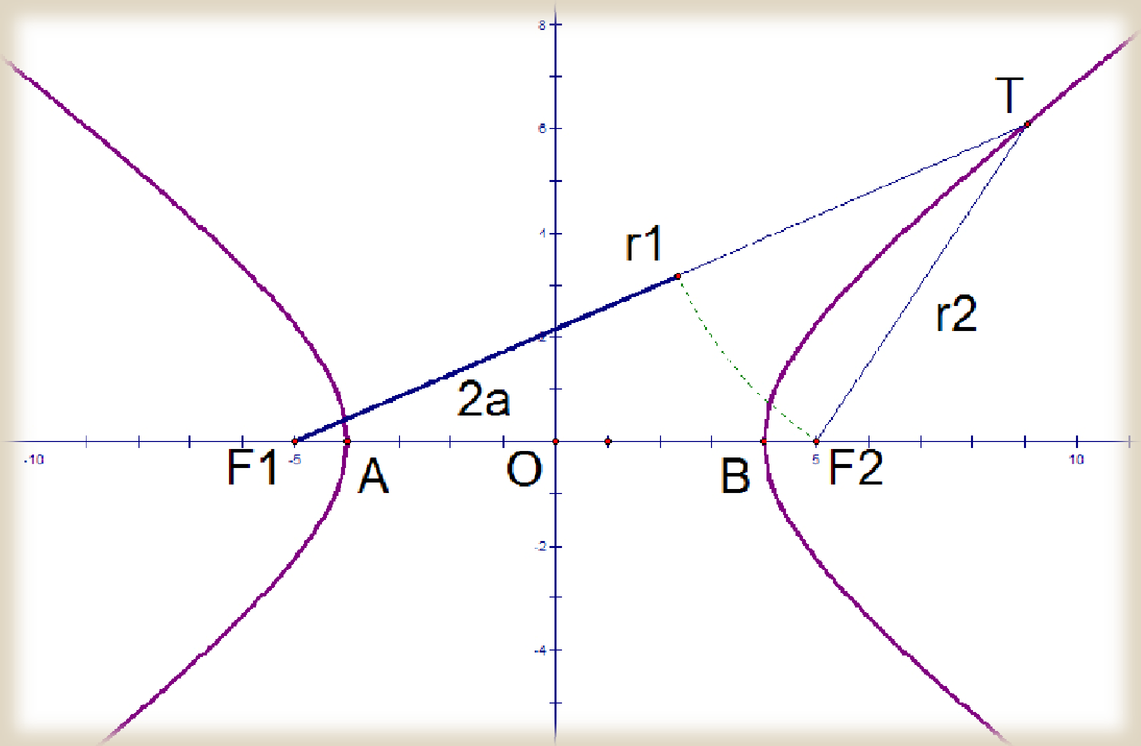
Što je hiperbola?



Hiperbola je skup svih točaka T u ravnini za koje vrijedi :

$$\left| r_1 - r_2 \right| = 2a$$

Što je hiperbola?



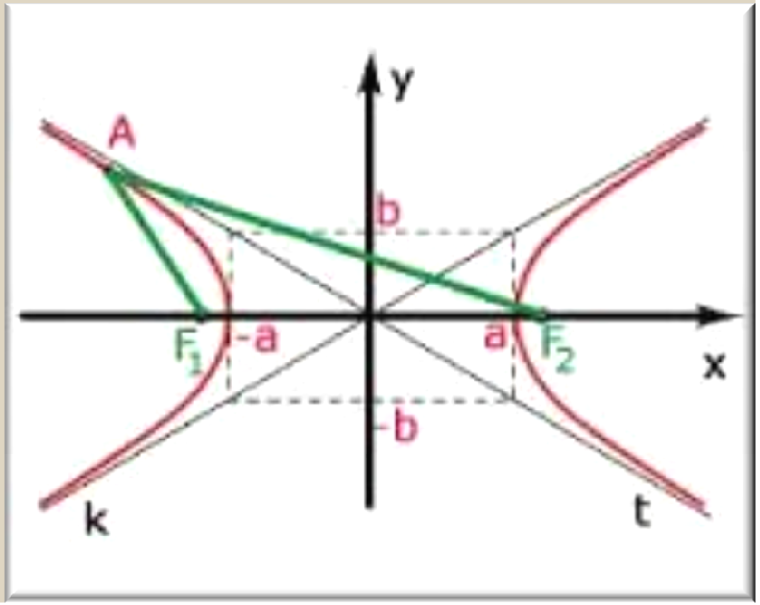
F_1 i F_2 su ŽARIŠTA (FOKUSI)

O je SREDIŠTE (CENTAR)

A i B su TJEMENA

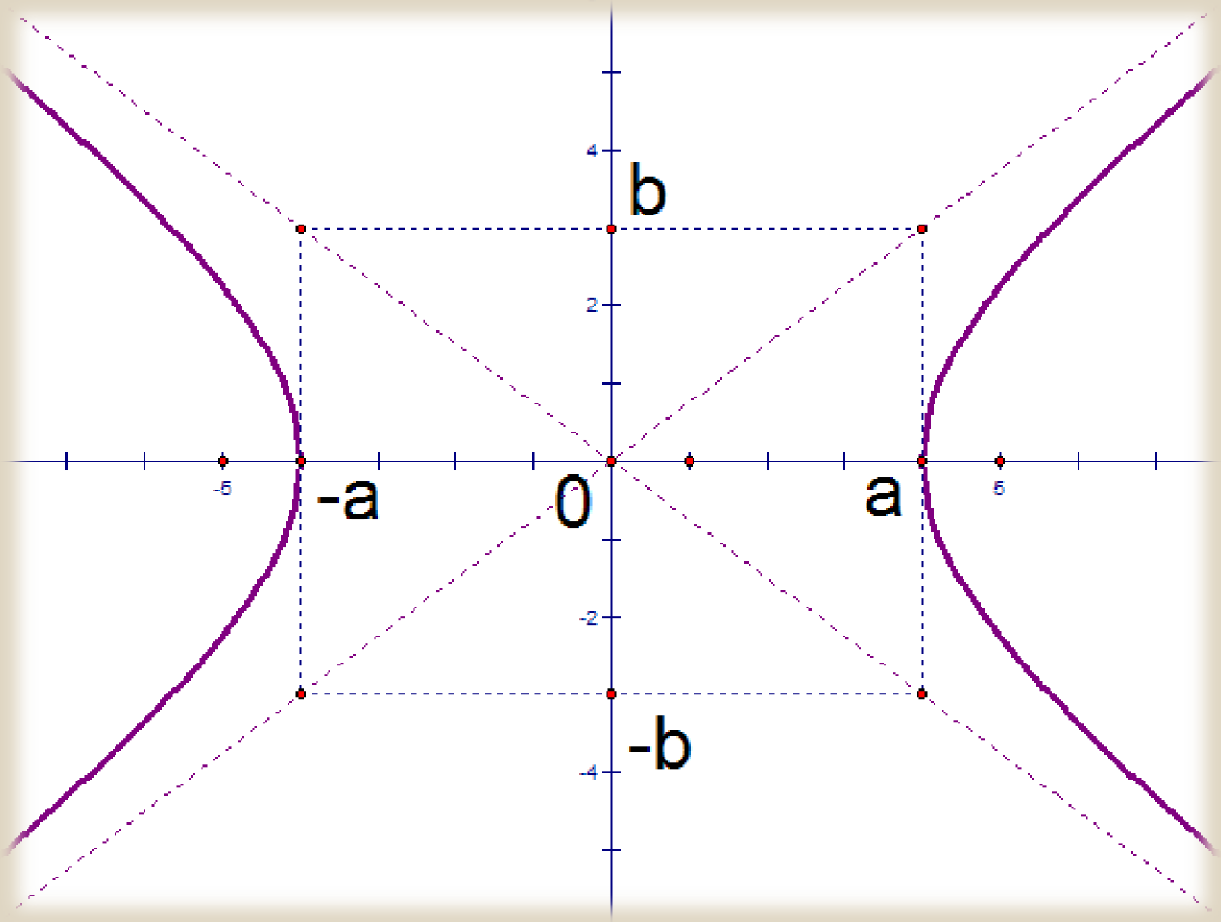
Jednadžba hiperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

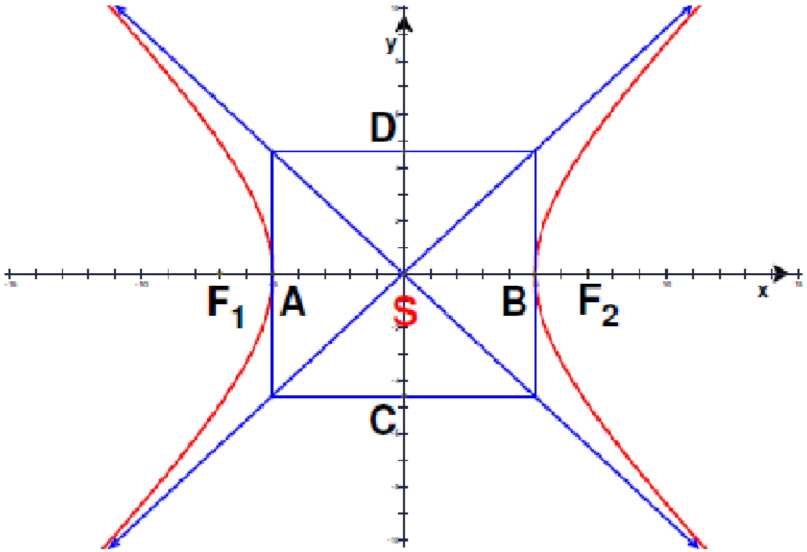


Ostali pojmovi...

- Imaginarna poluos
- Asimptote
- Parametar
- Karakteristični pravokutnik



hiperbola



hiperbola je skup svih točaka ravnine za koje je apsolutna vrijednost razlike udaljenosti od dvije zadane (fiksne) točke te ravnine stalna (konstantna)

središte hiperbole S(0, 0)

žarišta ili fokusi: $F_1(-e, 0)$, $F_2(e, 0)$

vrhovi ili tjemena: $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$

realna ili glavna os hiperbole: $|AB| = 2a$

imaginarna os hiperbole: $|CD| = 2b$, $C(0, -b)$, $D(0, b)$

realna poluos hiperbole: $|AS| = |SB| = a$

imaginarna poluos hiperbole: $|CS| = |SD| = b$

linearni ekscentricitet hiperbole: $|F_1S| = |SF_2| = e$, $e^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow e = \sqrt{a^2 + b^2}$

numerički ekscentricitet hiperbole: $\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$, $e > a \Rightarrow \varepsilon > 1$

parametar hiperbole

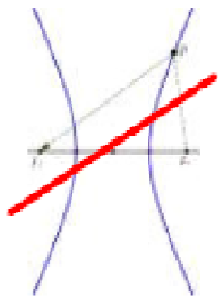
tetiva hiperbole koja prolazi fokusom i okomita je na realnu os

duljina parametra: $2p = \frac{2 \cdot b^2}{a}$, poluparametar: $p = \frac{b^2}{a}$

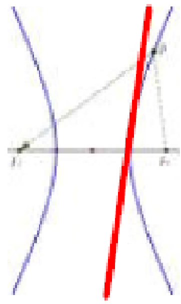
osna (kanonska) jednadžba hiperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ili} \quad b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2$$

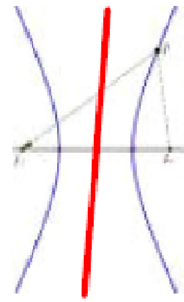
međusobni položaj hiperbole i pravca



pravac je sekanta hiperbole



pravac je tangenta hiperbole



pravac ne siječe hiperbolu

presjek pravca i hiperbole

traže se njihove zajedničke točke (ako postoje)

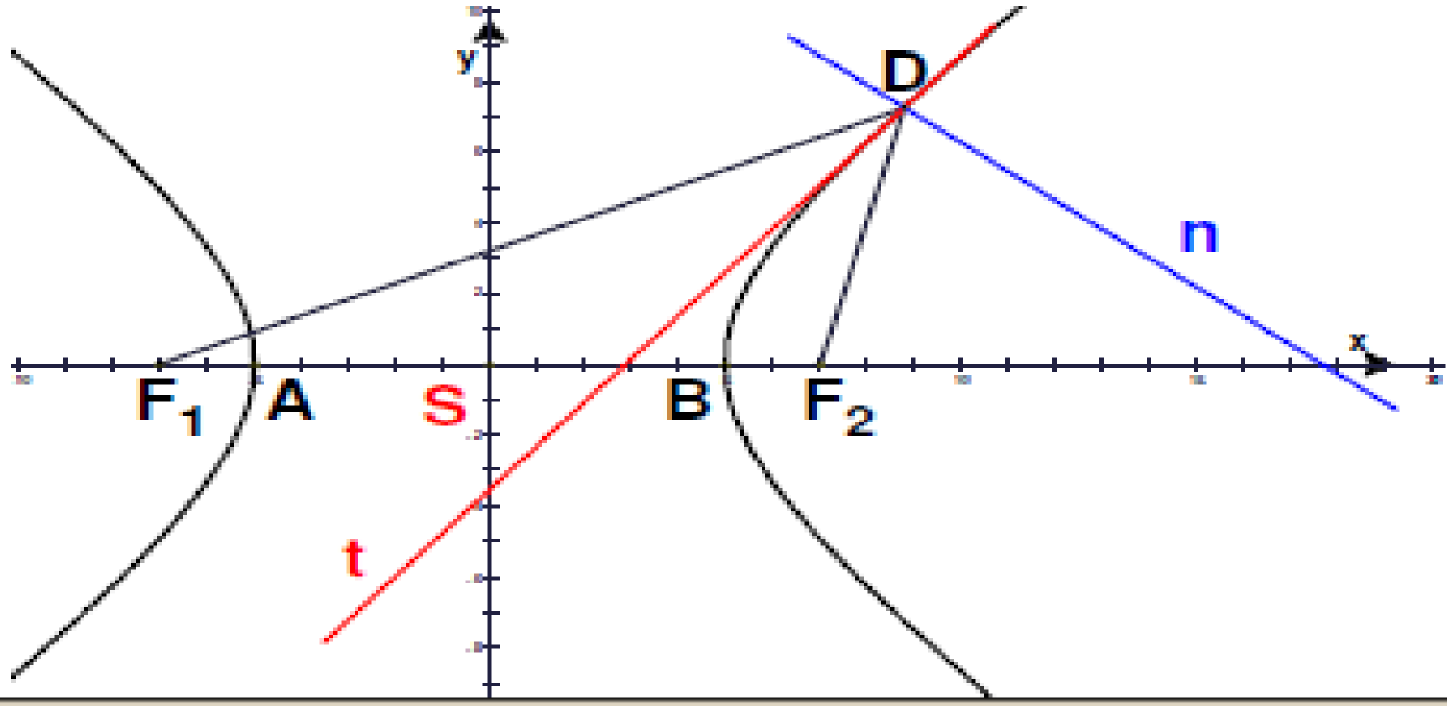
treba riješiti sustav jednadžbi

$$\left.\begin{array}{c} y = kx + l \\ b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \text{uvrstimo y iz prve} \\ \text{u drugu jednadžbu} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \text{nakon sređivanja dobijemo} \\ \text{kvadratnu jednadžbu} \end{pmatrix}:$$

simetričnost

- hiperbola ima dvije osi simetrije
- hiperbola ima jedno središte simetrije



asimptote

- pravci koji dodiruju hiperbolu u beskonačnosti
- pravci kojima se grane hiperbole neograničeno približavaju pri udaljavanju u beskonačnost

jednadžbe asimptota

$$y = \frac{b}{a} \cdot x \quad , \quad y = -\frac{b}{a} \cdot x$$

jednakostranična hiperbola

žarišta ili fokusi: $F_1\left(-a \cdot \sqrt{2}, 0\right)$, $F_2\left(a \cdot \sqrt{2}, 0\right)$, vrhovi ili tjemena: A(– a, 0), B(a, 0)

asimptote: y = – x, y = x

jednadžbe jednakostranične hiperbole

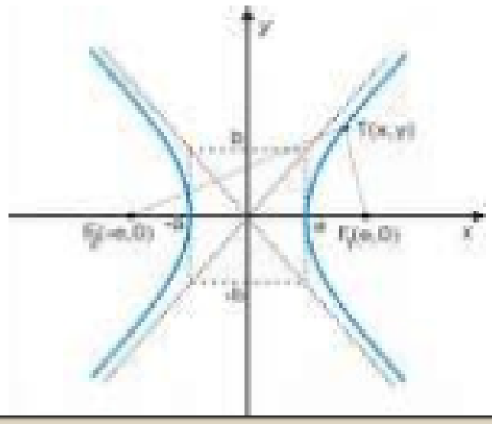
$$a = b \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x^2 - y^2 = a^2$$

žarišta i koordinatne osi

ako su žarišta F_1 i F_2 na

x-osi jednadžba hiperbole je:

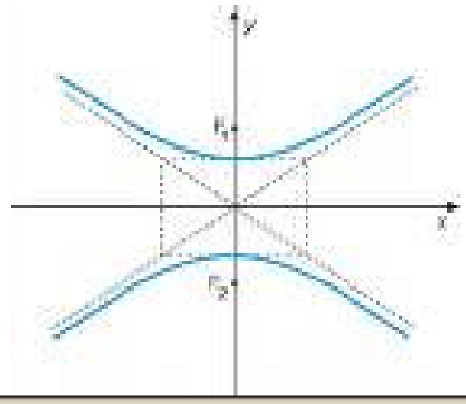
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



ako su žarišta F_1 i F_2 na

y-osi jednadžba hiperbole je:

$$\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=-1$$



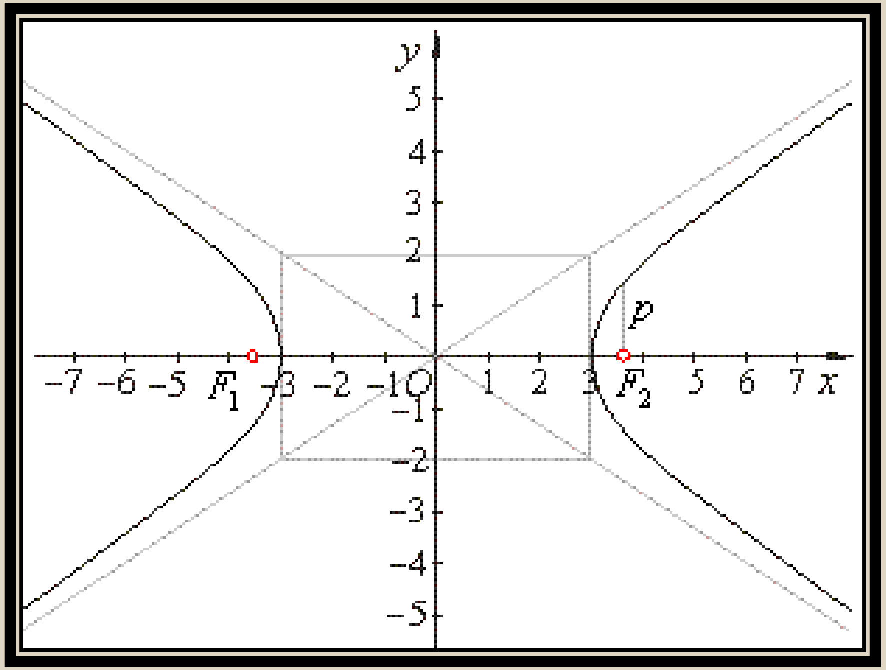
Kako utječu koeficijenti u jednadžbi na izgled hiperbole?

- Mijenjanjem koeficijenta **a** mijenja se razmak između fokusa
- Mijenjanjem koeficijenta **b** mijenja se zakrivljenost hiperbole

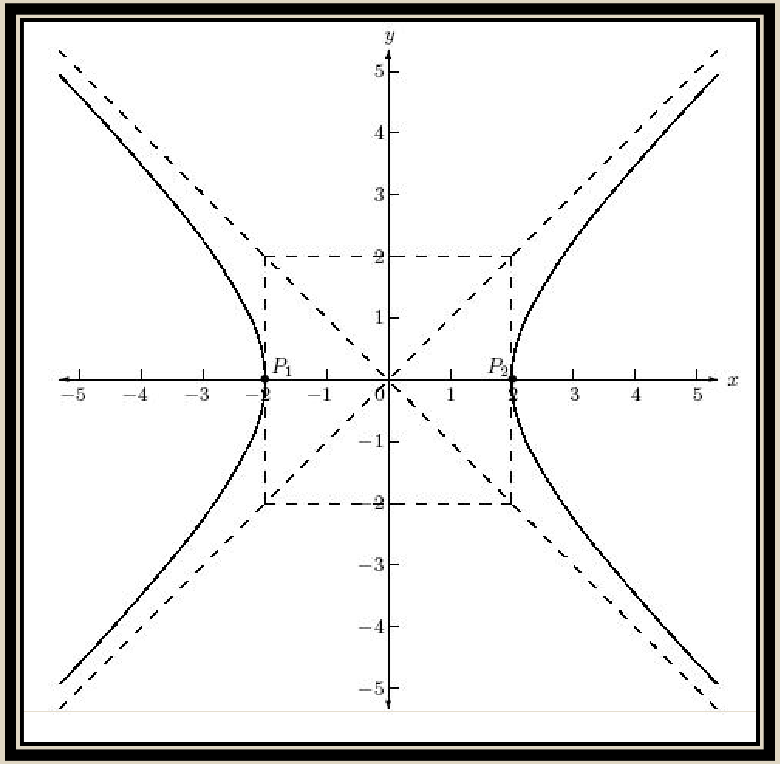
Pogledajte primjere na slijedećem slajdu!

Pri tome obratite pažnju na:

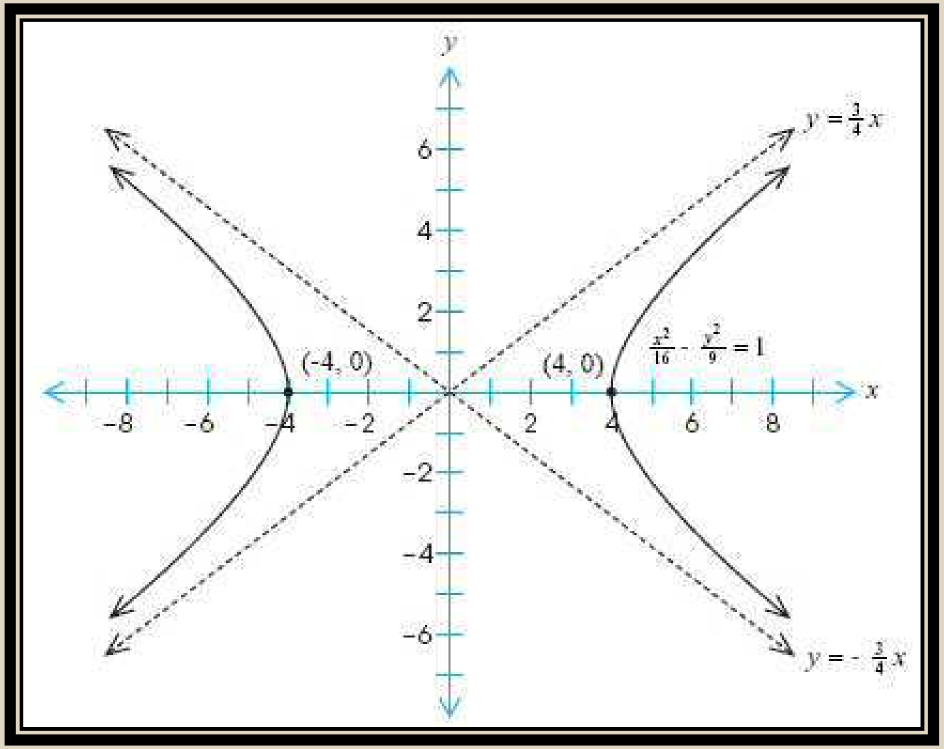
koordinate tjemena i zakrivljenost hiperbole



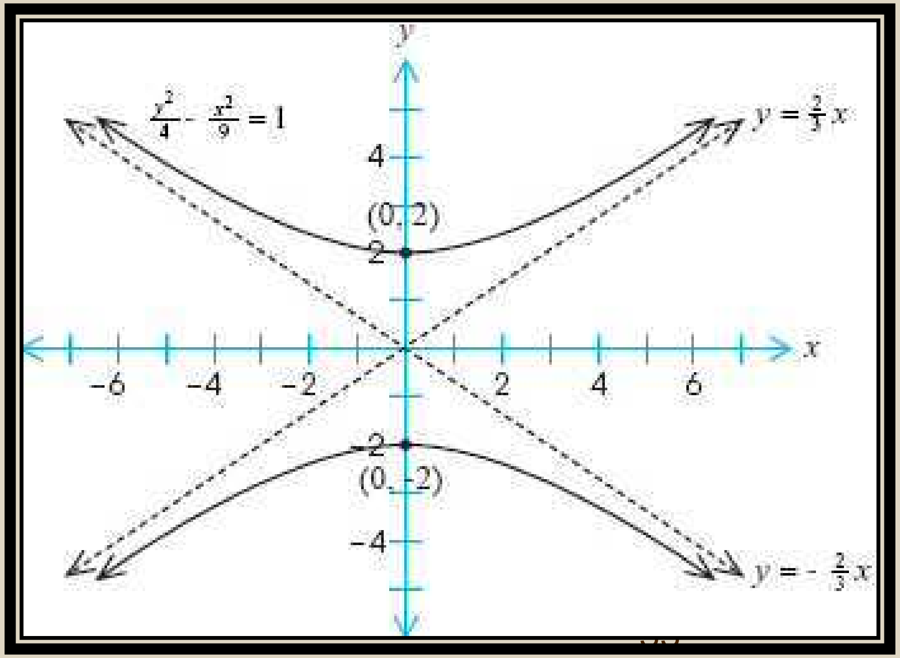
y
x
F_1
F_2
O
P



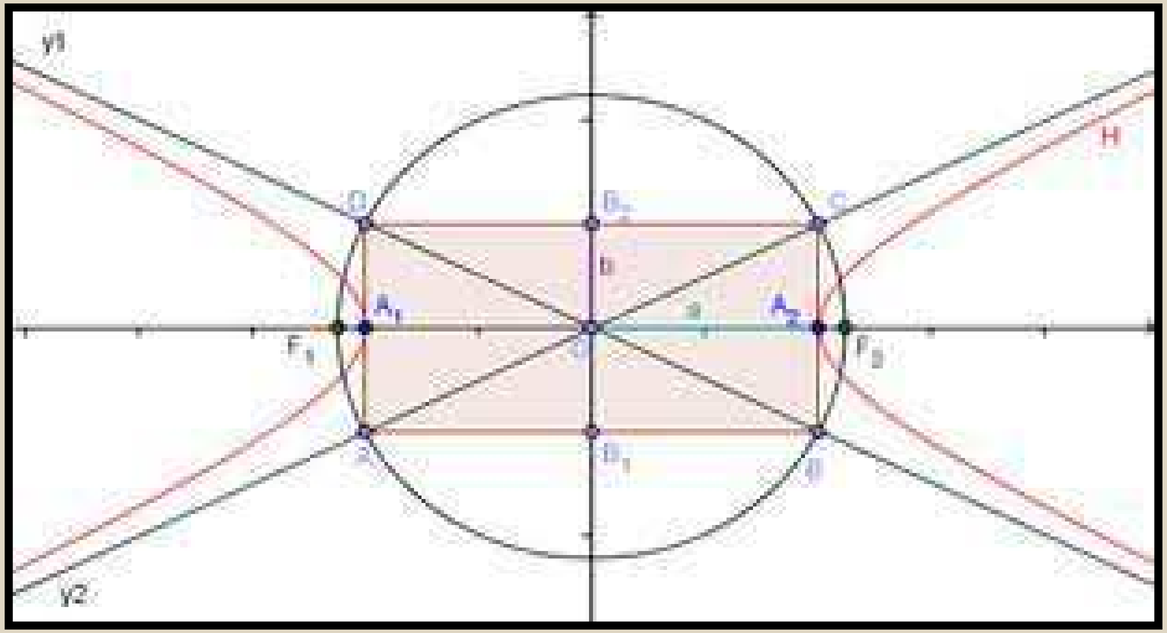
y
x
P_1
P_2

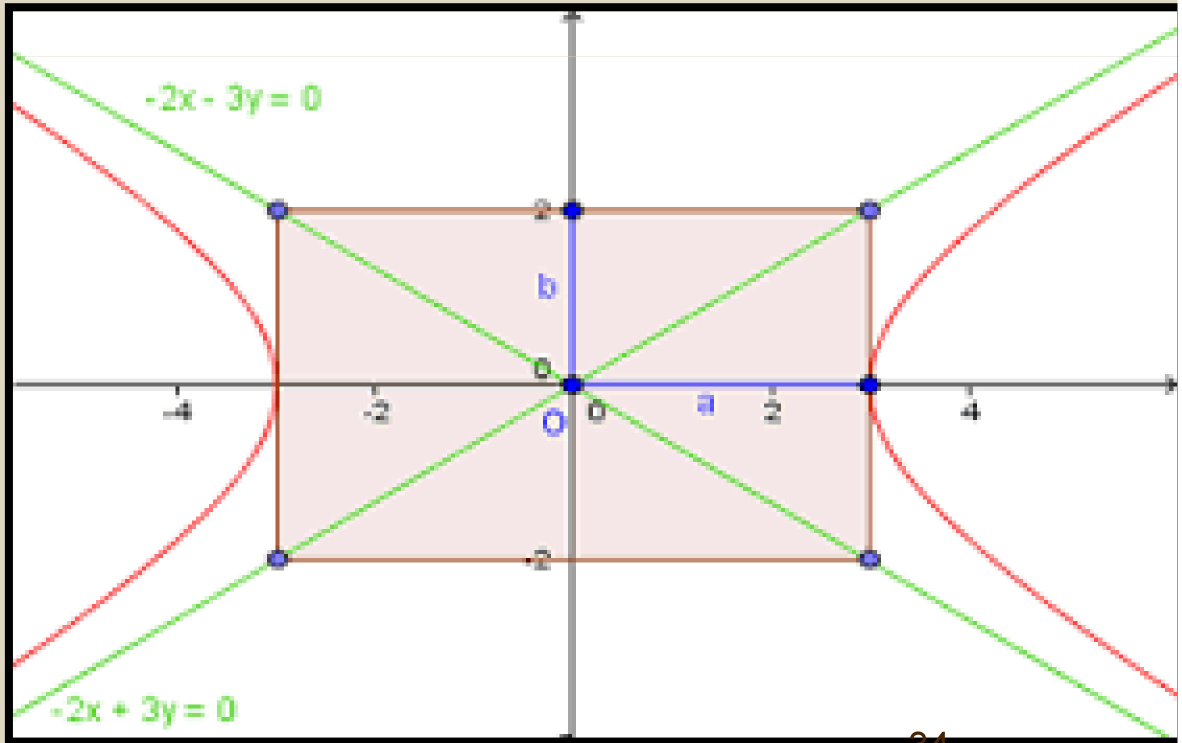


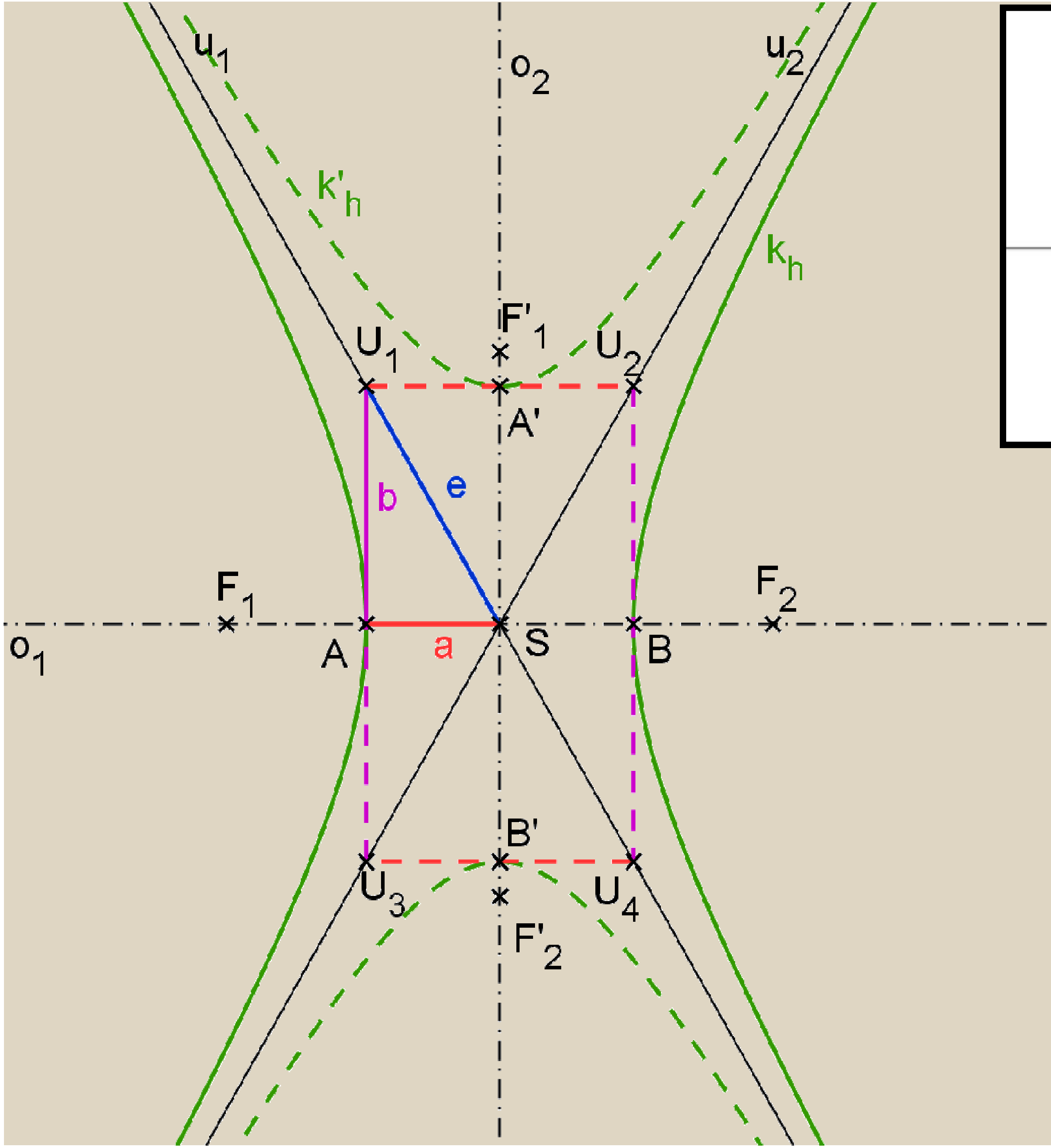
y
x
$y = \frac{3}{4}x$
$y = -\frac{3}{4}x$
(-4, 0)
(4, 0)
$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$



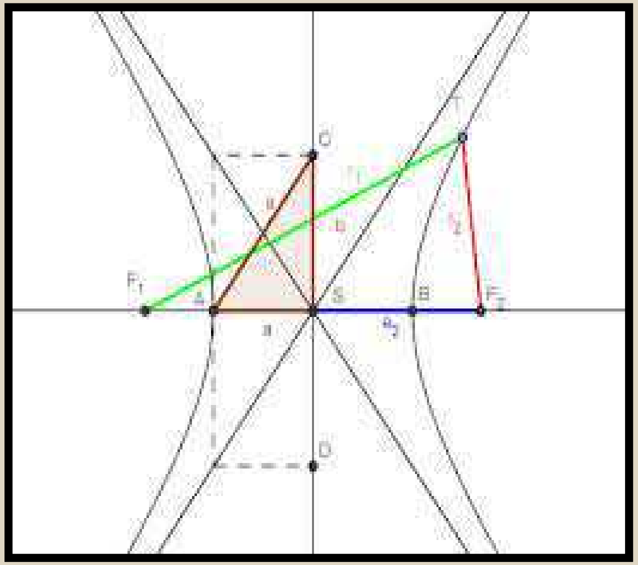
y
x
$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$
$y = \frac{2}{3}x$
$y = -\frac{2}{3}x$
(0, 2)
(0, -2)



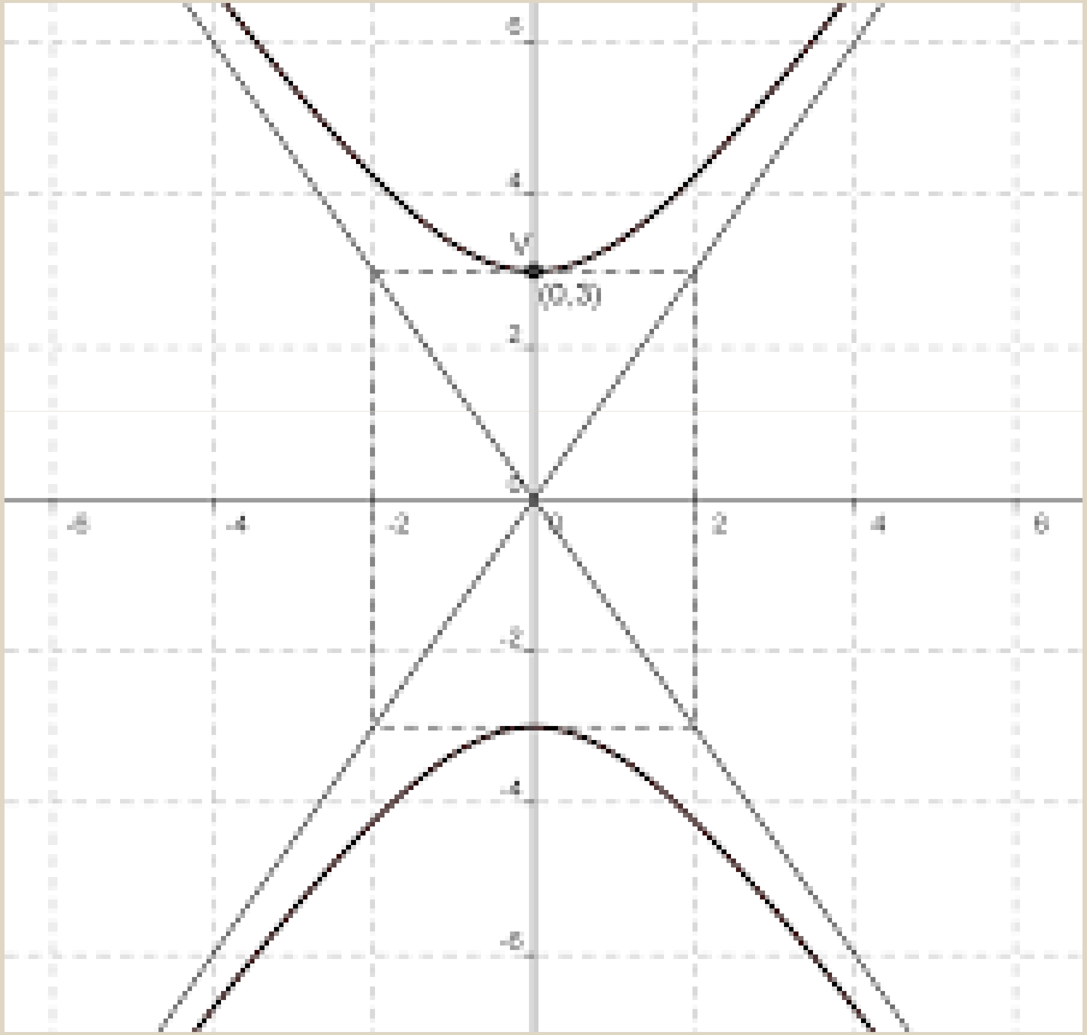

-2x - 3y = 0
-2x + 3y = 0



u_1
o_2
u_2
k'_h
k_h
F'_1
U_1
U_2
A'
b
e
F_1
F_2
o_1
A
a
S
B
B'
U_3
U_4
F'_2



Žarišta elipse se nalaze na osi **Y**:



Malo o povijesti hiperbole...

- Menehmo - 4. st.pr.Kr.

  - otkrio hiperbolu

- Apolonije - 2. st.pr.Kr.

  - uveo naziv hiperbola

Menehmo (380. - 320. god. prije Krista)

- Starogrčki matematičar i geometar, pripadnik Platonove Akademije u Ateni. Njemu se pripisuje pronalazak konika (krivulja drugog reda)

- Smatra se da je bio učitelj Aleksandra Makedonskog

- Do otkrića tih krivulja (ne samo **hiperbole** nego i **elipse** i **parabole**) je došao prilikom pokušaja rješavanja jednog od delskih problema: udvostručenja kocke. Menehmo je otkrio da se presjekom uspravnog stošca i ravnine koje je okomita na izvodnicu stošca dobiju do tada nepoznate krivulje. Vrsta krivulje je ovisila o vrsti stošca. Kod stošca koji ima šiljasti kut pri vrhu osnog presjeka dobiva se elipsa, kod stošca pravokutnog osnog presjeka parabola i tupokutnog presjeka hiperbola. Ove nazive nije dao Menehmo, imena pripadajućim krivuljama su pridružena kasnije.

Apolonija iz Pergama

- starogrčki matematičar iz razdoblja helenizma, smatrao da se pleneti gibaju oko Sunca, a Sunce zajedno s njima oko Zemlje

- u njegovim djelima pojavljuju se po prvi puta nazivi elipsa, hiperbola, parabola, asimptota...

- naziv hiperbola javlja se po prvi puta u 2.st.pr.Kr. u njegovom djelu „O konikama“

Anegdota o Gausu

Kao učenik, veliki matematičar Gaus (1777-1855) mnogo puta je svojim umom zadivio nastavnike. Jednom je nastavnik rekao Gausu:

- Postavić u ti dva pitanja. Ako na prvo odgovoriš točno, na drugo ne moraš odgovoriti.

- Reci koliko iglica ima božićna jelka?

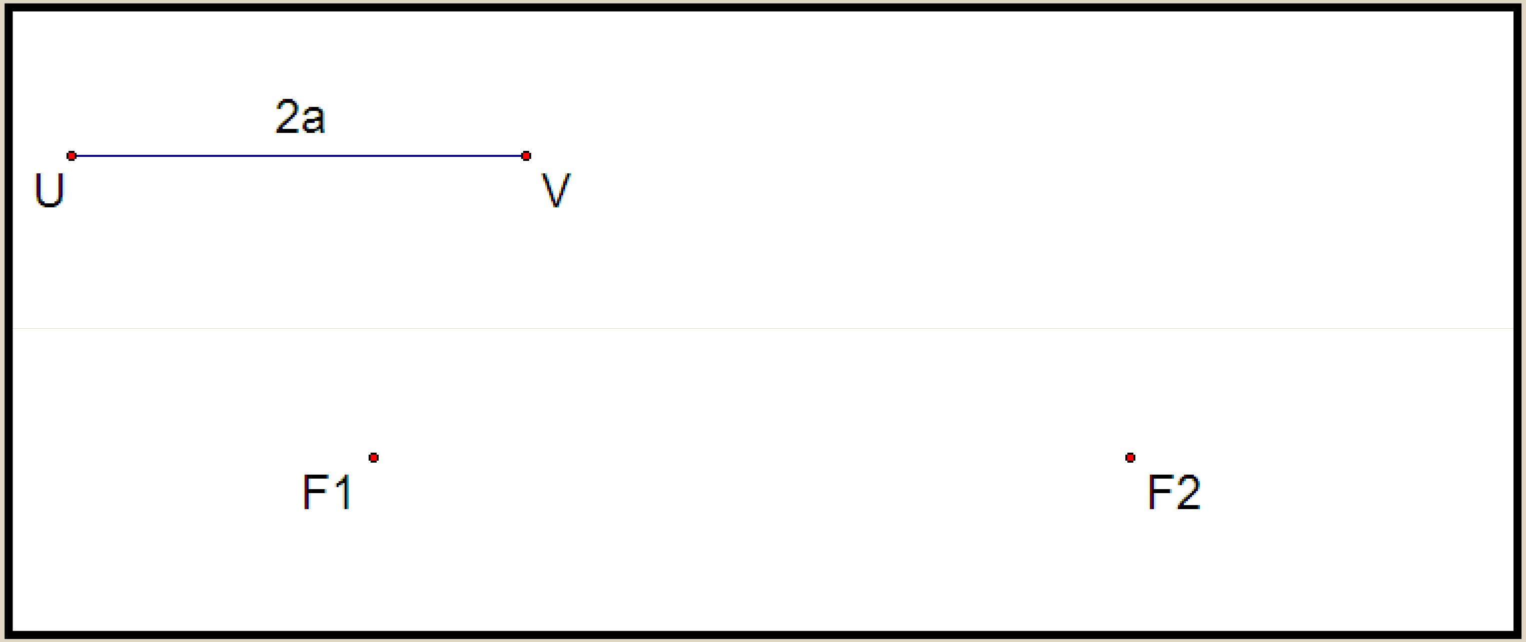
Gaus je brzo odgovorio:

- 67543 ′

- Kako si tako brzo izračunao? ′ - pitao je učitelj.

-To je drugo pitanje, gospodine učitelju ′- odgovorio je Gaus.

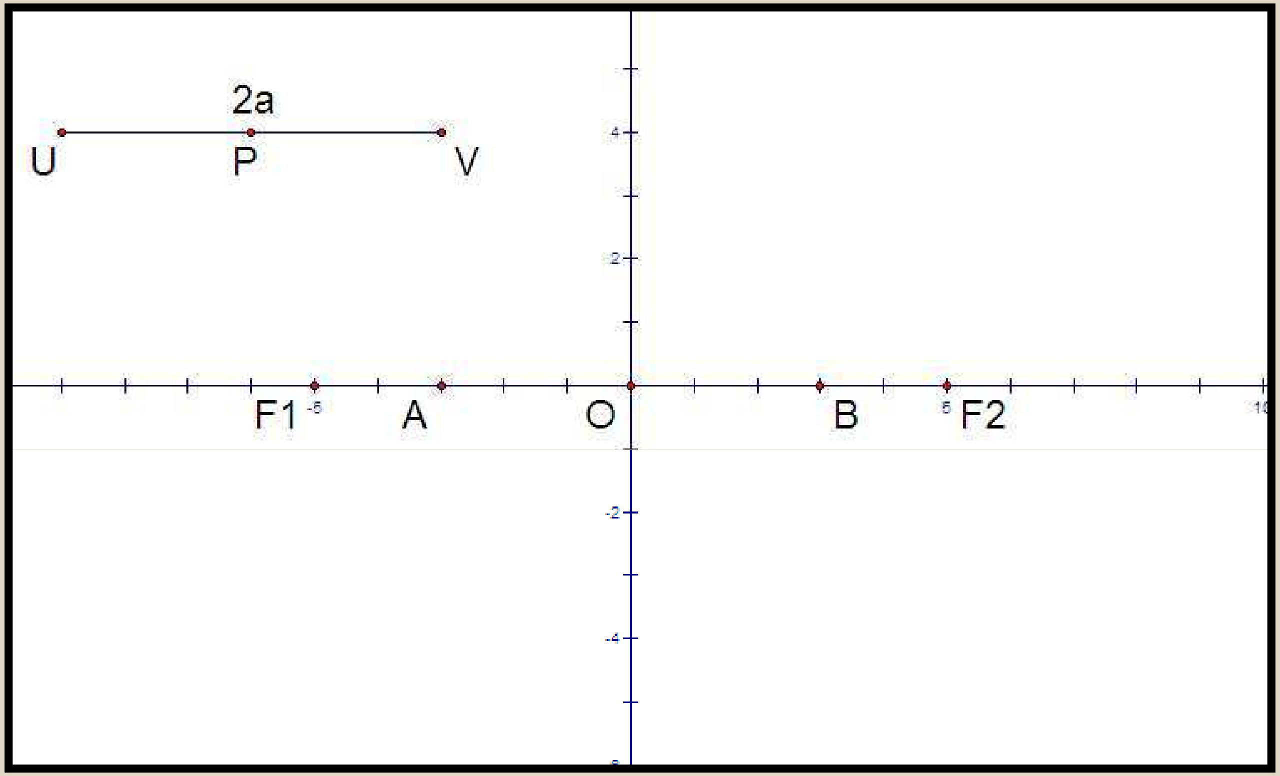
Konstrukcija hiperbole (1)



Korak 1:

Neka su zadani fokusi hiperbole i velika os duljine 2a.

Konstrukcija hiperbole (2)

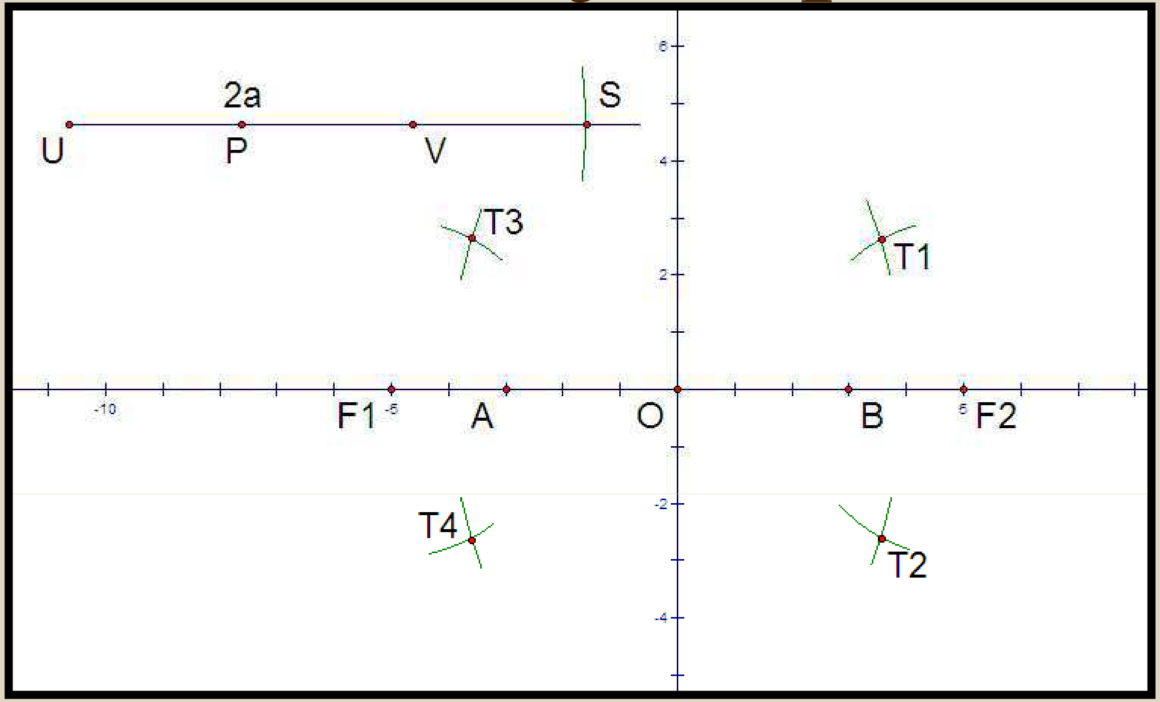


Korak 2:

Konstruiramo točku O kao polovište dužine koja spaja fokuse.

Konstruiramo točke A i B na dužini F1F2 na udaljenosti a od ishodišta O

Konstrukcija hiperbole (3)



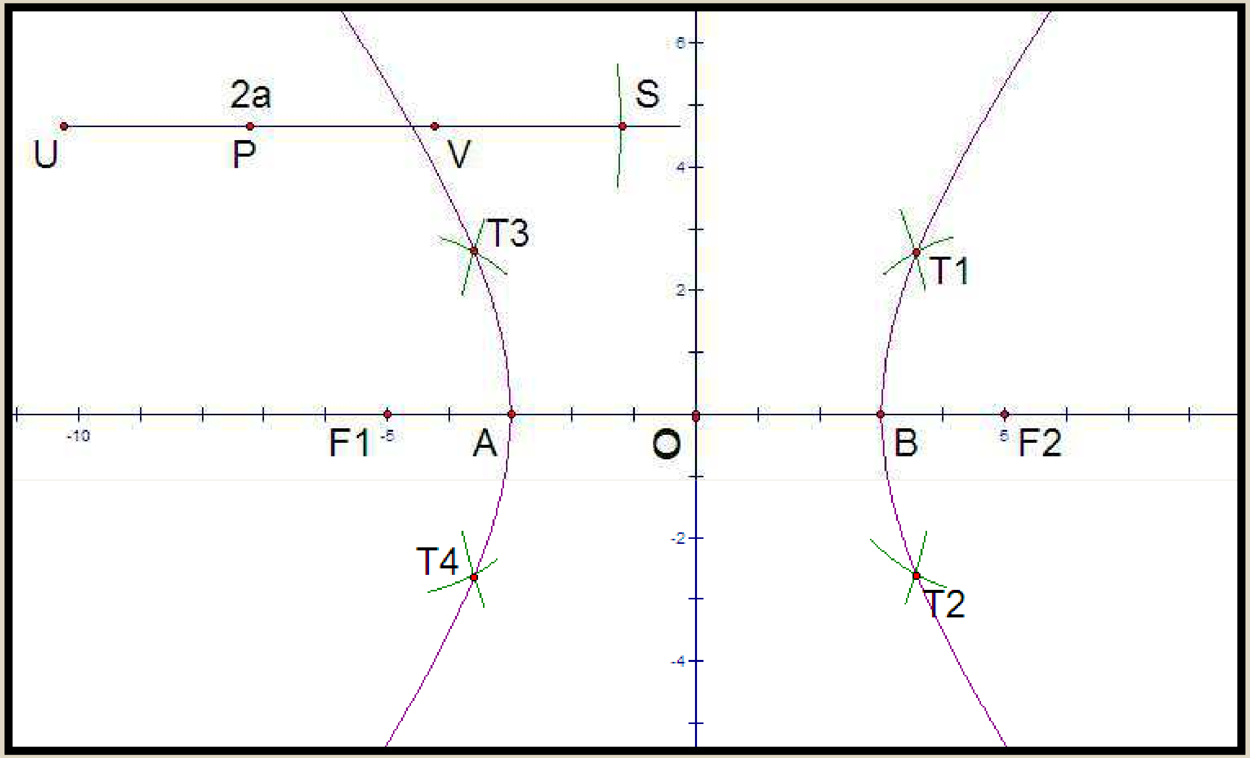
Korak 3:

Produžimo dužinu UV preko točke V i na njoj odaberemo točku S. Konstruiramo lukove Tako da dobijemo točke T1, T2, T3 i T4 :

1.Središte u F1, radijus US
2.Središte u F2, radijus US
3.Središte u F1, radijus VS
4.Središte u F2, radijus VS

(te točke dobijemo kao presjek kružnica 1.-4.)

Konstrukcija hiperbole (4)

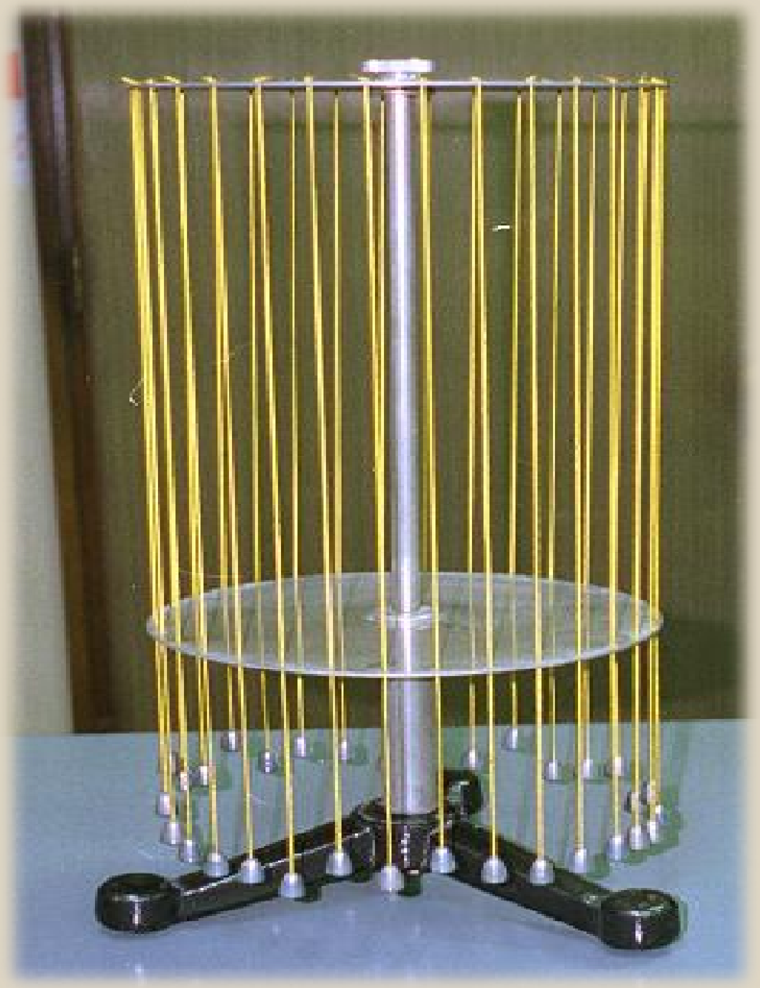


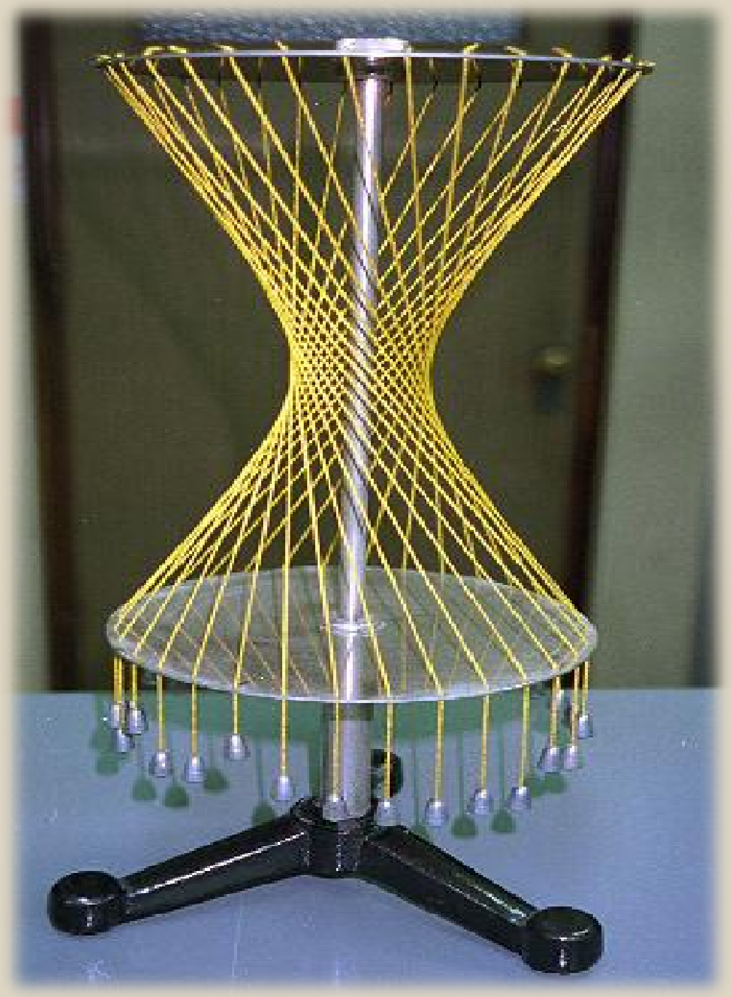
Korak 4:

Analogno konstruiramo još točaka odabirom neke druge točke na pravcu UV (zbog preglednosti nije nacrtano).

Dobivene točke spojimo glatkom krivuljom i dobivamo hiperbolu kao na slici!

Konstrukcija hiperbole na drugačiji način ☺





Primjena hiperbole

- U astronomiji
- U strojarstvu
- U arhitekturi
- U navigaciji

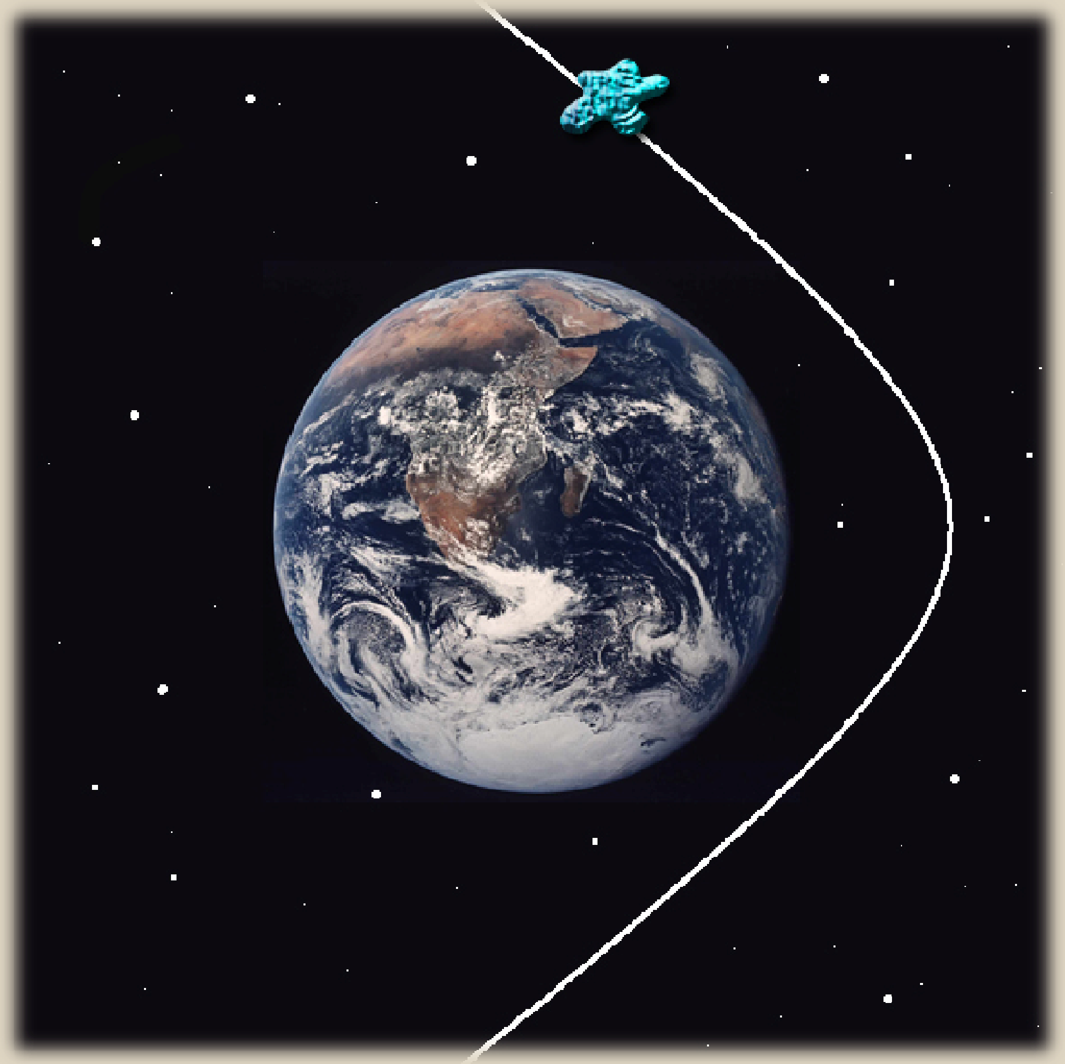
Hiperbolu nije netko izmislio iz razonode...

Primjena hiperbole

Primjena u astronomiji – putanja kometa

Kometi imaju putanju u obliku elipse, hiperbole i parabole

Jedino će se kometi s eliptičnom putanjom moći ponovno vidjeti.



Primjena hiperbole

Prilikom **dizajniranja ovih tornjeva** inženjeri su suočeni sa sljedećim problemima :

- struktura mora biti dovoljno izdržljiva

-treba iskoristiti što manje materijala

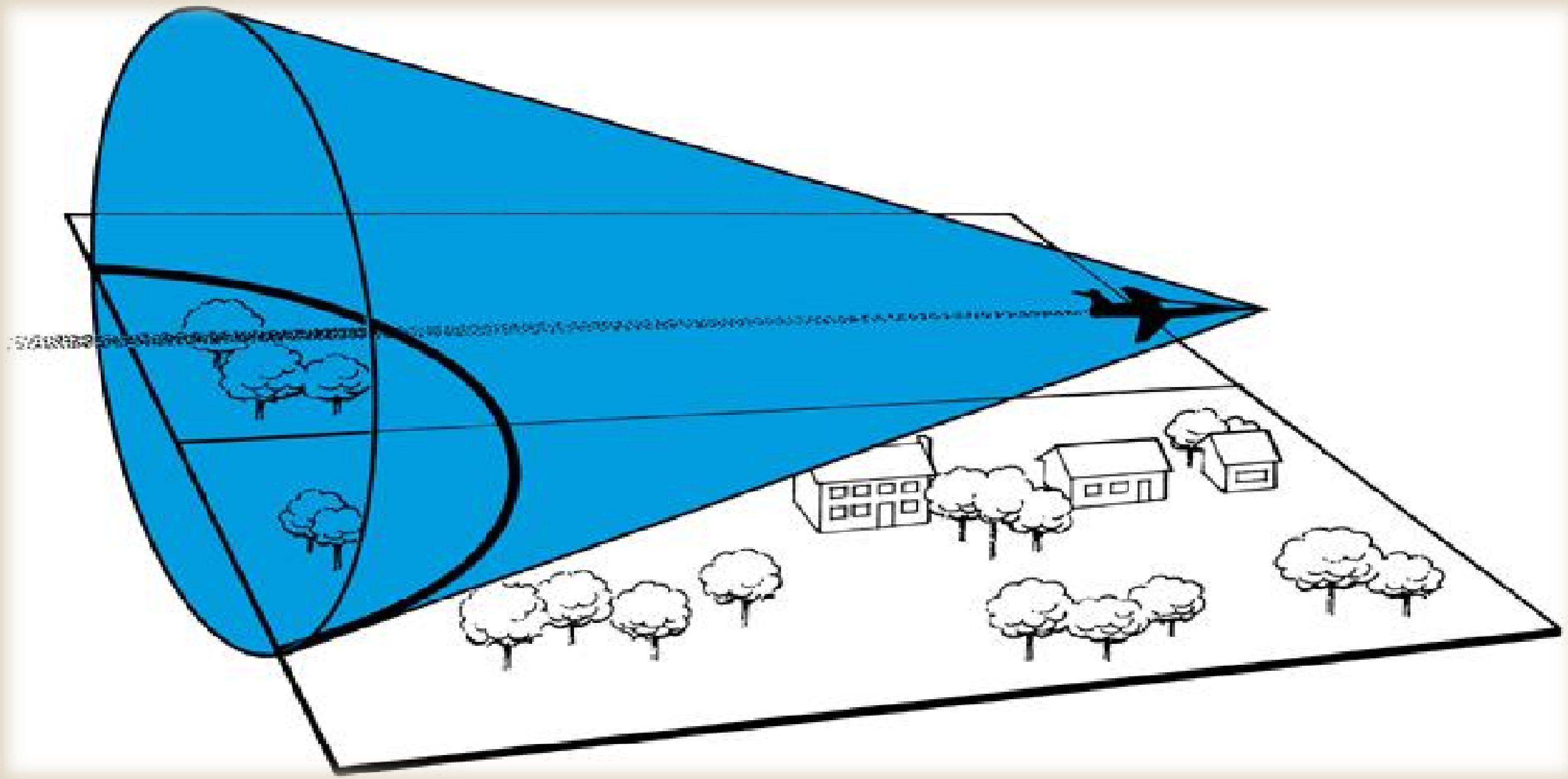
Hiperbolični oblik uspješno rješava oba problema.

Za dani promjer, visinu i jačinu vjetra, ovaj oblik zahtjeva manje materijala od bilo kojeg drugog oblika.

Primjena hiperbole

Budući se **avion** kreće brzinom većom od brzine zvuka, dobije se stožasti oblik vala. Presjek dobivenog stošca s ravninom tla ima oblik hiperbole.

Na tim mjestima se istovremeno čuje eksplozija koja nastane usljed probijanja zvučnog zida. No izvan hiperbole eksplozija se uopće ne čuje.



Osim što je oblik hiperbole koju smo vidjeli kod nuklearne elektrane koristan, hiperboličan izgled zgrade je efektan **i estetski prilično lijep**.

Primjena hiperbole u navigaciji

–Određujemo lokaciju broda ako znamo udaljenosti od 3 odašiljača - točna lokacija broda se određuje kao presjek dviju hiperbola.

Ako imamo odašiljače A,B i C onda tražimo presjek hiperbole kojoj su fokusi A i B i hiperbole sa fokusima B i C

LORAN (Long Range Navigation)

hiperbolički radio navigacijski sustav razvijen u Sjedinjenim Američkim Državama tijekom Drugog svjetskog rata